Preliminary Concepts in Abstract Algebra: A Pilipino Translation

MARI-JO PANGANIBAN RUIZ

Ms. Ruiz is associate professor at the Mathematics Department of Ateneo University. She is a NEDA-NSDB scholar and is now a Ph.D. Mathematics candidate of the U.P.-Ateneo-La Salle Mathematics Consortium.

The following is an attempt at translating into Pilipino the first lecture of an Abstract Algebra course intended for undergraduate mathematics majors. It is written in the belief that translations of college mathematics texts into Pilipino should be done by the mathematics teachers themselves in consultation with the linguists and not the other way around.

The writer does not necessarily believe that mathematics teachers should go into the translation of higher mathematics texts on an extensive scale. There is still a lot to be said about the merits of channeling the effort required into contributing to the increase of mathematical knowledge instead.

The work is experimental, the lecture in Pilipino is yet to be delivered. Any comments are welcome.

In this translation Maugnaying Pilipino terms have been used when the writer felt them appropriate.

PILIPINO	ENGLISH
Katuturan 1.1	**Definition 1.1**
Ang kayariang alhebra ay binubuo ng	An algebraic structure consists of
a) mga kabilang sa isang tangkas	a) a set of elements
b) isa o higit pang mga sakilos na tukoy sa mga kabilang sa tangkas.	b) one or more operations defined on the elements of the set
k) mga batlain na tinutupad ng mga kabilang at sakilos.	c) a set of postulates which the elements and operations satisfy
d) isa o higit pang mga ugnayan na tukoy sa mga kabilang.	d) one or more relations defined among the elements.

Katuturan 1.2

Ipalagay na isang tangkas ang A. Ang *dalawahang sakilos* "⊙" ay sinasabing tukoy sa tangkas A kung ang bawat tambal na ayos (a, b), ng mga kabilang ng A, ay may katugong tanging kabilang a ⊙ b.

Halimbawa 1.1

Sa tangkas ng mga buumbilang I, ang palaragdagan "+" ay isa sa mga tukoy na dalawahang sakilos.

Definition 1.2

Let A be a given set. A *binary operation* "⊙" on A is a correspondence that associates with each ordered pair (a, b) of elements of A, a uniquely determined element a ⊙ b.

Example 1.1

Addition "+" is one of the binary operations defined on the set I of integers.

Katuturan 1.3

Ang isang *ugnayan* "∼" ay sinasabing tukoy sa tangkas A kung sa bawat tambal na ayos (a, b), ng mga kabilang ng A, makahulugan ang a ∼ b at masasabing totoo o hindi ito. Kung makatotohanan ang a ∼ b, sinasabing *kaugnay* ng a ang b.

Halimbawa 1.2

Isa sa mga tukoy na ugnayan sa tangkas ng mga buumbilang I ang pagiging higit ">".

Definition 1.3

A *relation* "∼" *is defined* on a set A if for each ordered pair (a, b) or elements of A, a ∼ b is meaningful and is either true or false.

Example 1.2

Greater than ">" is a relation defined on the set of integers I.

Katuturan 1.4

Ang isang ugnayan "∼" na tukoy sa tangkas A ay tinatawag na *ugnayang tumbas* kung tinutupad nito ang sumusunod:

a) kaangkinang pasarili, a ∼ a, ang bawat kabilang ay kaugnay ng kanyang sarili.

b) kaangkinang timbang, a ∼ b ⇒ b ∼ a, kapag kaugnay ng kabilang a kabilang b, kaugnay rin ng b ang a.

k) kaangkinang palipat, (a ∼ b) Λ (b ∼ k) ⇒ a ∼ k, kapag kaugnay ng kabilang a ang kabilang b, at kaugnay ng kabilang b ang kabilang k, kaugnay rin ng a ang k.

Definition 1.4

A relation "∼" defined on a set A is an *equivalence relation* if it satisfies the following:

a) reflexive property, a ∼ a

b) symmetric property, a ∼ b ⇒ b ∼ a

c) transitive property, (a ∼ b) Λ (b ∼ c) ⇒ a ∼ c.

Kung ang ugnayang tukoy sa isang tangkas ay isang ugnayan tumbas at kaugnay ng kabilang a ang kabilang b, masasabi ring magkatumbas ang a at b.

If $a \sim b$, then a is said to be equivalent to b.

Halimbawa 1.3

Isa sa mga ugnayang tumbas sa tangkas ng mga buumbilang I ang pagiging kahalaga.

Example 1.3

Equality is an equivalence relation on the set of integers I.

Halimbawa 1.4

Ang pagkahalintulad ay isang ugnayang tumbas sa tangkas ng mga tatsulok.

Example 1.4

Similarity is an equivalence relation on the set of all triangles.

Halimbawa 1.5

Sa tangkas ng mga buumbilang I, ipalagay na kaugnay ng kabilang a ang kabilang b kung tukol na bilang ang kalabisan o kakulangan ng a sa b. Madaling mapatunayan na isang ugnayang tumbas ang nasabing ugnayan: Tawaging E ang tangkas ng mga tukol na bilang

$$E = \{2k \mid k \in I\}$$

a) $a \in I \Rightarrow a - a = 0 \in E \Rightarrow a \sim a$

b) $(a, b \in I) \wedge (a \sim b) \Rightarrow a - b = 2k \Rightarrow b - a = (-2)k \in E \Rightarrow b \sim a$

k) $(a, b \in I) \wedge (a \sim b) \wedge (b \sim k) \Rightarrow$
$(a - b = 2\ell) \wedge (b - k = 2m) \Rightarrow$
$a - k = (a - b) + (b - k) =$
$2\ell + 2m = 2(\ell + m) \in \Rightarrow a \sim k$

Example 1.5

Let $a, b \in I$. Define the relation "$\sim$" on I as follows: $a \sim b$ if and only if $a - b = 2m$ for some $m \in I$. The relation so defined is an equivalence relation.

Hindi ugnayang tumbas ang ugnayang itinukoy sa halimbawa 1.2.

The relation referred to in example 1.2 is not an equivalence relation.

Katuturan 1.5

Ipalagay na may ugnayang tumbas "$\sim$" na tukoy sa tangkas A. Ipalagay rin na kabilang ng tangkas ang a. Ang kubtangkas ng A na binubuo ng lahat ng mga kabilang ng A na kaugnay ng a,

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

ay tinatawag na *tangkas tumbasan na kinaroroonan ng a*.

Definition 1.5

Let "$\sim$" be an equivalence relation defined on set A. If $a \in A$, the subset of A which consists of all those elements of A related to a, comprise the *equivalence set containing a*,

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

Halimbawa 1.6

Ang mga tangkas tumbasang nagbuhat sa ugnayang tumbas ng halimbawa 1.5 ay ang sumusunod:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ [-2] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ [-1] &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \\ [0] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ [1] &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mapupuna na dalawa lamang sa mga nasabing tangkas tumbasan ang magkaiba $[0] = [2] = [-2] = \ldots$, $[1] = [-1] = \ldots$ Ang $[0]$ ay binubuo ng lahat ng mga tukoi na bilang at ang $[1]$ ay binubuo ng lahat ng mga bilang na gansal. Samakatuwid, ang mga buumbilang ay nahahati sa dalawang tangkas tumbasan ng nasabing ugnayang tumbas.

Example 1.6

Consider the equivalence relation defined on I in example 1.5 the equivalence sets relative to the given equivalence relation are

$$\begin{aligned} &\vdots \\ [-2] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ [-1] &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \\ [0] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ [1] &= \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \\ [2] &= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note that only two distinct equivalence sets result, $[0]$ and $[1]$. $[0]$ is the set of all even integers and $[1]$ is the set of all odd integers. Hence, the given equivalence relation partitions the set of integers into two equivalence classes.

Teorema 1.1

Tinutupad ng mga tangkas tumbasan ang mga sumusunod:

a) $a \in [a]$, kabilang ng tangkas tumbasang $[a]$ ang a

b) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$, ang tangkas tumbasang $[b]$ ay dinaiiba sa tangkas tumbasang $[a]$ kung kabilang ng tangkas tumbasang $[a]$ ang b

k) $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$, upang mapatunayan na di-magkaiba ang tangkas tumbasang $[a]$ at $[b]$, kailangan at sapat na ipakita na magkaugnay ang a at b

d) $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$, ang tangkas tumbasang $[a]$ ay di-naiiba sa tangkas tumbasang $[b]$ kung ang bagtas ng mga tangkas $[a]$ at $[b]$ ay naiiba sa tangkas na walang kabilang

Theorem 1.1

Equivalence sets have the following properties:

a) $a \in [a]$

b) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

c) $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$

d) $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$

e) $[a] \cap [b] = \phi \Leftrightarrow a \not\sim b$, upang mapatunayan na ang bagtas ng mga tangkas tumbasan [a] at [b] ay ang tangkas na walang kabilang, kailangan at sapat na ipakita na di-magkaugnay ang a at b

Patunay:

Ipalagay na isang ugnayang tumbas ang "$\sim$".

a) Ipakita: $a \in [a]$

$a \sim a$, ang kabilang a ay kaugnay ng kanyang sarili dahil sa katangiang pasarili ng ugnayang tumbas.

Samakatuwid, kabilang ng [a] ang a, $a \in [a]$.

b) Upang mapatunayan na $[b] = [a]$, sapat na ipakita na sakop ng tangkas [a] ang tangkas [b] at sakop rin ng [b] ang [a], $[b] \subseteq [a]$ at $[a] \subseteq [b]$.

Ipakita: $[b] \subseteq [a]$

Pumili ng alinmang kabilang w ng [b], $w \in [b] \Rightarrow$ kaugnay ng w ang b, $w \sim b$. Dahil ipinalagay na kabilang ng tangkas tumbasan [a] ang b, nangangahulugang kaugnay ng b ang a,

$$b \in [a] \Rightarrow b \sim a.$$

Ngunit kung kaugnay ng w ang b at kaugnay rin ng b ang a, ang kaangkinang palipat ng ugnayang tumbas ay nagpapatunay na kaugnay ng w ang a.

$$(w \sim b) \wedge (b \sim a) \Rightarrow w \sim a$$

Samakatuwid, kabilang ng [a] ang w, $[b] \subseteq [a]$. Mapapatunayan rin na sakop ng [b] ang [a], $[a] \subseteq [b]$, sa pamamagitan ng kahawig na paraan. Samakatuwid, $[b] = [a]$.

e) $[a] \cap [b] = \phi \Leftrightarrow a \not\sim b$

Proof:

Let "$\sim$" be an equivalence relation .

a) To show: $a \in [a]$

$a \sim a$, by the reflexive property of the equivalence relation.

$\therefore a \in [a]$ by definition of the equivalence set [a].

b) To prove that $[b] = [a]$, it is sufficient to show that $[b] \subseteq [a]$ and $[a] \subseteq [b]$.

To show: $[b] \subseteq [a]$

Let $x \in [b]$, then $x \sim b$.

The assumption $b \in [a]$ implies $b \sim a$, but $(x \sim b) \wedge (b \sim a) \Rightarrow x \sim a$

$\therefore x \in [a]$

Since x is an arbitrary element of [b] we have succeeded in showing that $[b] = [a]$

The proof of the fact that $[a] = [b]$ is analogous.

We can therefore conclude that $[b] = [a]$.

k) $\Rightarrow$: Kung ang tangkas [a] ay di-naiiba sa tangkas [b], [a] = [b], nangangahulugang kabilang ng [b] ang a dahil kabilang ng [a] ang a.

$$(a \in [a]) \wedge ([a] = [b]) \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b.$$

$\Leftarrow$: Kung kaugnay ng a ang b, nangangahulugang kabilang ng [b] ang a. Dahil sa napatunayan natin sa b), sumusunod na [a] = [b].

c) To show: $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$

$\Rightarrow$: $a \in [a] = [b] \Rightarrow a \sim b$

$\Leftarrow$: $a \sim b \Rightarrow a \in [b]$

$\Rightarrow [a] = [b]$

by the previous property b)

d) Ipakita: $[a] = [b]$

Kung ang bagtas ng mga tangkas [a] at [b] ay naiiba sa tangkas na walang kabilang nangangahulugang may kabilang w ang tangkas [a] na kabilang rin ng tangkas [b],

$$[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow \exists w \in [a] \cap [b]$$
$$\Rightarrow (w \in [a]) \wedge (w \in [b]).$$

Samakatuwid kaugnay ng w ang a at kaugnay ng w ang b. Dahil sa kaangkinang timbang ng ugnayang tumbas, kaugnay rin ng a ang w.

$$\Rightarrow (w \sim a) \wedge (w \sim b)$$
$$\Rightarrow (a \sim w) \wedge (w \sim b).$$

Dahil sa kaangkinang palipat ng ugnayang tumbas, kaugnay ng a ang b,

$$\Rightarrow a \sim b.$$

Kaya't ang tangkas [a] ay di-naiiba sa tangkas [b], dahil sa napatunayan natin sa k).

$$[a] = [b]$$

d) To show: $[a] = [b]$

$$[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow \exists x \in [a] \cap [b]$$
$$\Rightarrow (x \in [a]) \wedge (x \in [b])$$
$$\Rightarrow (x \sim a) \wedge (x \sim b)$$
$$\Rightarrow (a \sim x) \wedge (x \sim b)$$
$$\Rightarrow a \sim b$$
$$\Rightarrow [a] = [b]$$

by the previous property c)

e) $\Rightarrow$: Kailangang ipakita na $[a] \cap [b] = \phi \Rightarrow a \not\sim b$. Patunayan natin ang katumbalikan ng pahiwatig na ito, $a \sim b \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \phi$

e) $\Rightarrow$: We have to prove that

$[a] \cap [b] = \phi \Rightarrow a \not\sim b$

Let us prove the contrapositive of the statement, i.e. $a \sim b \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \phi$

Ipakita: $[a] \cap [b] \neq \phi$

Kung kaugnay ng a ang b, nangangahuiugang kabilang ng [b] ang a

$$a \sim b \Rightarrow a \in [b].$$

Alam rin natin na kabilang ng [a] ang a, kaya't kabilang ng bagtas ng mga tangkas [a] at [b] ang a

$$(a \in [a]) \wedge (a \in [b]) \Rightarrow a \in [a] \cap [b].$$

Samakatuwid, naiiba ang bagtas [a] at [b] sa tangkas na walang kabilang.

$$\Rightarrow [a] \cap [b] \neq \phi$$

To show: $[a] \cap [b] \neq \phi$

$a \sim b \Rightarrow a \in [b]$

$(a \in [a]) \wedge (a \in [b]) \Rightarrow$

$a \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow [a] \cap [b] \neq \phi.$

$\Leftarrow$: Ipakita: $a \nsim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \phi$

Patunayan natin ito sa pamamagitan ng paghanap ng kasalungatan. Ipalagay na ka'ba sa walang kabilang ang bagtas ng mga tangkas [a] at [b], nangangahuiugang may kabilang w ang tangkas [a] na kabilang rin ng [b],

$$[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow \exists w \in [a] \cap [b]$$
$$\Rightarrow w \in [a] \wedge w \in [b]$$

Samakatuwid, tulad ng napakita na rin natin sa pagpatunay ng d), ang a ay kaugnay ng b

$$\Rightarrow a \sim b.$$

Ngunit ito'y salungat sa palagay na ang a ay di-kaugnay ng b. Napatunayan natin na hindi totoo na kaiba sa tangkas na walang kabilang ang bagtas ng mga tangkas [a] at [b]. Samakatuwid,

$$[a] \cap [b] = \phi.$$

$\Leftarrow$: To show: $[a] \cap [b] = \phi$

We use a proof by contradiction.

Suppose $[a] \cap [b] \neq \phi$

$\Rightarrow \exists x \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow (x \in [a]) \wedge (x \sim b)$

$\Rightarrow (x \sim a) \wedge (x \sim b)$

$\Rightarrow (a \sim x) \wedge (x \sim b)$

$\Rightarrow a \sim b$